Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica mod. 2

Prof. R. Ghiselli Ricci, D. Pasetto

Tema A - 03/06/2024
Tempo a disposizione: 2h

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Voto Analisi Matematica mod 1: ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. È permesso utilizzare un formulario personale scritto su un foglio A4 (fronte/retro).
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Si potrà abbandonare l'aula solo al termine delle operazioni di consegna, rispettando le indicazioni dei docenti.

Problema 1 (8 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $-2yy' = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x}$

1.2 Trovare le soluzioni che soddisfano le seguenti condizioni iniziali e determinarne il dominio di esistenza:

(a) $y(1) = -1$ (b) $y(1) = -\frac{1}{2}$

Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = (2\cos(t), \sin(t))\,, & \text{se } t \in \left[-\frac{3}{2}\pi\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]; \\ \mathbf{r}_2(t) = \left(\frac{1}{2}\cos(4t + \frac{\pi}{2}),\ \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(4t + \frac{\pi}{2})\right), & \text{se } t \in \left]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

2.2 Determinare le equazioni del sostegno della curva. Disegnare qualitativamente il sostegno e indicare il verso di percorrenza.

2.3 Calcolare l'integrale di linea di prima specie su $\mathbf{r}_2$ di $f(x, y) = \dfrac{4x}{\sqrt{12 - 4x^2 - (2y-1)^2}}$

Problema 3 (11 punti)

Considerare la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x, y) = (1 - x^2) \cdot (x + y^2 - 1)$$

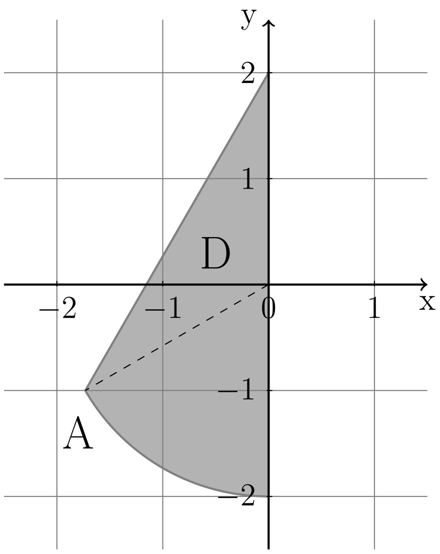
3.1 Disegnare un grafico qualitativo della curva di livello $f(x, y) = 0$.

3.2 Mostrare che f ha quattro punti stazionari, di cui tre sono punti di sella. Determinare l'immagine di f.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(0, -1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0, 0)$; il vertice A ha coordinate $A = (-\sqrt{3}, -1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'integrale di $f(x, y) = -2x^2y$ su D.



Soluzioni

Problema 1 (8 punti)

1. Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $-2yy' = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x}$

   Si tratta di un'equazione a variabili separabili con

$$a(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad b(y) = -\frac{1-y^2}{2y}$$

   Da cui otteniamo le condizioni $x \neq 0$; $y \neq 0$. Si nota che $b(y) = 0 \iff y = \pm 1$. Quindi $y(x) = \pm 1$ sono soluzioni costanti.

   Per $y \neq \pm 1$ possiamo risolvere separando le variabili ed integrando

$$\begin{aligned} \frac{-2yy'}{1-y^2} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{-2y}{1-y^2}\, dy &= \int \frac{1}{x}\, dx \\ \ln|1-y^2| &= \ln|x| + c \end{aligned}$$

   Ora cerchiamo di esplicitare la variabile dipendente

$$\begin{aligned} |1-y^2| &= \mathrm{e}^c|x| \\ y^2 &= 1 \pm \mathrm{e}^c|x| \\ y &= \pm\sqrt{1 \pm \mathrm{e}^c|x|} \end{aligned}$$

   dove $c \in \mathbb{R}$. L'integrale generale (includendo le soluzioni costanti) si può scrivere come

$$y(x) = \pm\sqrt{1 + k|x|}$$

   con $k \in \mathbb{R}$.

2. Trovare le soluzioni che soddisfano le seguenti condizioni iniziali e determinarne il dominio di esistenza:

   (a) $y(1) = -1$ (b) $y(1) = -\frac{1}{2}$

   - (a) Si noti che si tratta della soluzione costante $y(x) = -1$
     Il dominio di esistenza è il più grande intervallo in cui la soluzione è definita, contenente la condizione iniziale. In questo caso $D =]0, +\infty[$
   - (b) Imponendo la condizione iniziale nell'integrale generale si ha: $-\frac{1}{2} = -\sqrt{1+k} \iff k = -3/4$. Per cui la soluzione cercata è

$$y = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}|x|}$$

Per trovare il dominio di esistenza dobbiamo imporre

$$1-\frac{3}{4}|x|>0 \iff -\frac{4}{3}<x<\frac{4}{3}$$

Ricordando che $x \neq 0$, il più grande intervallo in cui la soluzione è definita e che contiene la condizione iniziale è $D =]0, \frac{4}{3}[$

Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t)=\begin{cases}\mathbf{r}_1(t)=(2\cos(t),\sin(t))\,, & \text{se } t\in\left[-\frac{3}{2}\pi\ ,\ \frac{\pi}{2}\right];\\ \mathbf{r}_2(t)=\left(\frac{1}{2}\cos(4t+\frac{\pi}{2}),\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(4t+\frac{\pi}{2})\right), & \text{se } t\in\left]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right]\end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

$\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono continue. Inoltre

$$\mathbf{r}_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,1)=\mathbf{r}_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

quindi anche γ è continua.

Si ha $\mathbf{r}(-3\pi/2)=\mathbf{r}_1(-3\pi/2)=(0,1)$ e $\mathbf{r}(\pi)=\mathbf{r}_2(\pi)=(0,1)$, quindi γ è chiusa.

Per la semplicità, abbiamo già trovato che $\mathbf{r}(-3\pi/2)=\mathbf{r}(\pi/2)$ quindi $\mathbf{r}$ non è semplice. $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ invece sono semplici.

Per la regolarità, non è difficile vedere che sia $\mathbf{r}_1$ che $\mathbf{r}_2$ sono di classe C^1 sui loro domini. Inoltre, siccome

$$\mathbf{r}_1'(t)=(-2\sin(t),\cos(t)) \implies \|\mathbf{r}_1'(t)\|^2=4\sin^2(t)+\cos^2(t)>0\ \forall t$$

$$\mathbf{r}_2'(t)=\left(-2\sin(4t+\frac{\pi}{2}),2\cos(4t+\frac{\pi}{2})\right) \implies \|\mathbf{r}_2'(t)\|^2=4>0\ \forall t$$

per capire se $\mathbf{r}(t)$ sia regolare, bisogna analizzare cosa succede in $t=\pi/2$: un facile calcolo ci dice che

$$\mathbf{r}_1'(\pi/2)=(-2,0)=\mathbf{r}_2'(\pi/2)$$

quindi γ è regolare.

2.2 Determinare le equazioni del sostegno della curva. Disegnare qualitativamente il sostegno e indicare il verso di percorrenza.

Il supporto di $\mathbf{r}_1(t)$ è un'ellisse di centro l'origine e semiassi $a=2$ e $b=1$, equazione cartesiana: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

2.3 Calcolare l'integrale di linea di prima specie su $\mathbf{r}_2$ di $f(x,y)=\dfrac{4x}{\sqrt{12-4x^2-(2y-1)^2}}$

Il dominio di $f(x,y)=\frac{4x}{\sqrt{12-4x^2-(2y-1)^2}}$ è

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 12-4x^2-(2y-1)^2>0\}$$

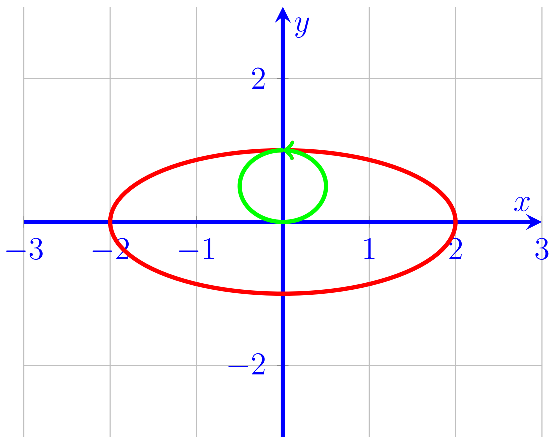


Figura 1: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso e $\mathbf{r}_2$ in verde).

che corrisponde ai punti interni della circonferenza di centro (0,1/2) e raggio $\sqrt{3}$. Quindi $\mathbf{r}_2$ è contenuta nel dominio di f

Si noti che

$$f(x,y) = \frac{4x}{\sqrt{12 - 4x^2 - (2y-1)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{3 - x^2 - (y - 1/2)^2}}$$

L'integrale di linea diventa

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{r}_2} \frac{4x}{\sqrt{12 - 4x^2 - (2y-1)^2}} = \\
=&\int_{\pi/2}^{\pi} 2(\frac{1}{2}\cos(4t + \pi/2)) \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{1}{4}}} 2\, dt = \\
=&\frac{4}{\sqrt{11}} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(4t + \pi/2))\, dt = \\
=&\frac{4}{\sqrt{11}} [\frac{\sin(4t + \pi/2)}{4}]_{\pi/2}^{\pi}\, dt = 0
\end{aligned}$$

Problema 3 (11 punti)

Considerare la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x,y) = (1 - x^2) \cdot (x + y^2 - 1)$$

3.1 Disegnare un grafico qualitativo della curva di livello $f(x,y) = 0$.

La curva di livello $f(x,y) = 0$ è data dal luogo dei punti del piano (x,y) che soddisfano $(x-1)^2 = 0$ oppure $x = -y^2 + 1$

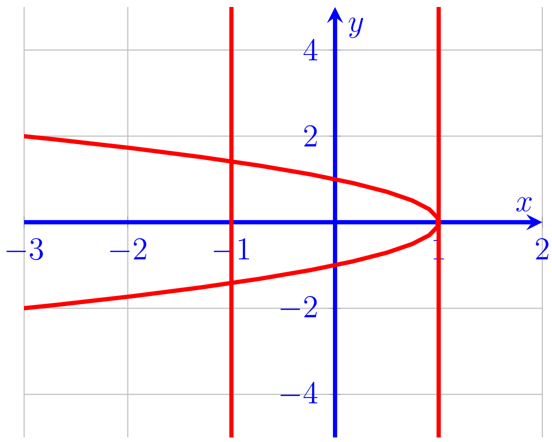


Figura 2: Curva di livello $f(x, y) = 0$

3.2 Mostrare che f ha quattro punti stazionari, di cui tre sono punti di sella. Determinare l'immagine di f.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - 2xy^2 + 2x + 1 \\ 2y - 2yx^2 \end{pmatrix}$$

I punti stazionari si trovano imponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} -3x^2 - 2xy^2 + 2x + 1 = 0 \\ 2y(1 - x^2) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $y = 0$ oppure $x = \pm 1$.

Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione si ha

$$-3x^2 + 2x + 1 = 0 \iff x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$$

quindi si trovano i punti stazionari $P_1 = (-\frac{1}{3}, 0)$ e $P_2 = (1, 0)$.

Partendo invece da $x = -1$ si arriva a $y^2 - 2 = 0$ che implica $y = \pm\sqrt{2}$, da cui si ottengono i punti $P_3 = (-1, \sqrt{2})$, $P_4 = (-1, -\sqrt{2})$.

Infine con $x = 1$ si riottiene $P_2 = (1, 0)$.

Quindi i punti stazionari sono $P_1 = (-1/3, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (-1, \sqrt{2})$, $P_4 = (-1, -\sqrt{2})$.

Cerchiamo di usare il test della matrice Hessiana per caratterizzare tali punti. In un punto (x, y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x - 2y^2 + 2 & -4xy \\ -4xy & 2 - 2x^2 \end{pmatrix}$$

Caratterizzazione punti stazionari

- P_1: $H_f(-1/3, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16/9 \end{pmatrix}$. La matrice Hessiana in P_1 è definita positiva, quindi P_1 è punto di minimo locale.
- P_2: $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $H_f(P_2)$ è semidefinita, quindi non possiamo usare il test della matrice Hessiana per determinare la natura di P_2.
- P_3: $H_f(-1, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. $det(H_f(P_3)) < 0$ quindi l'Hessiana è indefinita e P_3 è punto di sella.
- P_4: $H_f(-1, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. $det(H_f(P_4)) < 0$ quindi l'Hessiana è indefinita e P_4 è punto di sella.

Difficile

$$\Delta f_{P_2}(h, k) = f(P_2 + \mathbf{h}) - f(P_2) = f(1 + h, k) = -h(h + 2)(h + k^2)$$

Per $k = 0$ si ha

$$\Delta f_{P_2}(h, 0) = -h^2(h + 2)$$

che è sempre negativo per h sufficientemente piccoli.

Rimane quindi da mostrare che esistono degli incrementi (h, k) per cui $\Delta f_{P_2}(h, k) > 0$. Consideriamo $h = ak^2$; si ottiene:

$$\Delta f_{P_2}(ak^2, k) = -ak^4(ak^2 + 2)(a + 1)$$

che, per k sufficientemente piccolo, è sempre positiva se $a(a+1) < 0$, cioé $-1 < a < 0$. Quindi, per esempio, $\Delta f_{P_2}(-\frac{1}{2}k^2, k) < 0$ per ogni k sufficientemente piccolo.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(0, -1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

$$\nabla f(0, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\nabla f(0, -1)\| = \sqrt{5}$$

Quindi il versore di massima crescita in $(0, -1)$ è

$$\frac{\nabla f(0, -1)}{\|\nabla f(0, -1)\|} = (\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$$

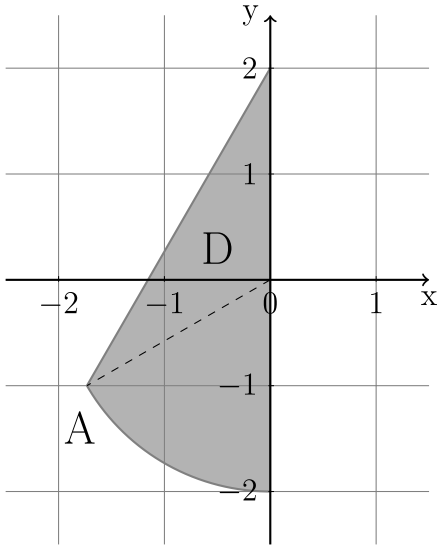
Il piano tangente al grafico di f in $(0, -1)$ ha equazione:

$$z = x - 2(y + 1)$$

.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$; il vertice A ha coordinate $A = (-\sqrt{3}, -1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'integrale di $f(x, y) = -2x^2 y$ su D.



Il dominio D si può scrivere come un dominio x-normale:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\sqrt{3} \leq x \leq 0 \quad , \quad -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{3}x + 2\}$$

Quindi l'integrale di f su D si ottiene da

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = -\int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{3}x+2} 2x^2 y\, dy \right) dx =$$

$$= -\int_{-\sqrt{3}}^{0} 2x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{3}x+2} dx =$$

$$= -\int_{-\sqrt{3}}^{0} x^2 \left((\sqrt{3}x + 2)^2 - (4 - x^2) \right) dx =$$

$$= -\int_{-\sqrt{3}}^{0} 4x^4 + 4\sqrt{3}x^3\, dx =$$

$$= -\left[\frac{4}{5}x^5 + \sqrt{3}x^4 \right]_{-\sqrt{3}}^{0} =$$

$$= -\frac{36}{5}\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = \frac{9}{5}\sqrt{3}$$

Soluzione alternativa. Lo stesso risultato si può ottenere scrivendo il dominio come unione di due insiemi disgiunti: $D = D_1 \cup D_2$ dove D_1 è il triangolo di vertici AOB, con $B = (0, 2)$, e D_2 è il settore circolare.

D_1 si può scrivere come dominio x-normale

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\sqrt{3} \leq x \leq 0 \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x + 2\}$$

D_2 si può scrivere in coordinate polari ($x = \rho \cos\theta$; $y = \rho \sin\theta$) come il dominio D_2',

$$D_2' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq \rho \leq 2 \quad , \quad \frac{7}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\}$$

Quindi l'integrale di f su D si ottiene da :

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Su D_1:

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy &= -\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\sqrt{3}x+2} 2x^2y\,dy\right)\,dx = \\
&= -\int_{-\sqrt{3}}^{0} 2x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\sqrt{3}x+2}\,dx = \\
&= -\int_{-\sqrt{3}}^{0} x^2\left((\sqrt{3}x+2)^2-(\frac{1}{3}x^2)\right)\,dx = \\
&= -\int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{8}{3}x^4+4\sqrt{3}x^3+4x^2\,dx = \\
&= -\left[\frac{8}{15}x^5+\sqrt{3}x^4+\frac{4x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{0} = \\
&= -\frac{24}{5}\sqrt{3}+9\sqrt{3}-4\sqrt{3} = \frac{1}{5}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Su D_2:

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy &= -\int_0^2\left(\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} 2\rho^4\cos^2(\theta)\sin(\theta)\,d\theta\right)\,d\rho = \\
&= -\left(\int_0^2 2\rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2(\theta)\sin(\theta)\,d\theta\right) = \\
&= \left[\frac{2\rho^5}{5}\right]_0^2\left[\frac{\cos^3(\theta)}{3}\right]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \\
&= \frac{64}{5}\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{8}{5}\sqrt{3}
\end{aligned}$$